УДК 621.372
В.С. Годлевский В.С., д-р техн. наук, директор
МП «ДИСИТ» НАН Украины,
А.М. Денисенко, мл. научн. сотруд.
Ин-т проблем моделирования в энергетике
им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15.
тел: (044)4247162. E-mail: disit@svitonline.com

Методические погрешности дискретного преобразования Фурье и способы их компенсации

Рассмотрены основные методические погрешности – неравномерность амплитудно-частотной характеристики дискретного преобразования Фурье и размывание каждой спектральной составляющей исходного спектра анализируемого сигнала, а также способы вычисления этих погрешностей и способы их компенсации.

К л ю ч е в ы е с л о в а: дискретное преобразование Фурье, оконная функция, окно, паразитная модуляция, коэффициент размытости спектра, главный лепесток, боковой лепесток, эквивалентная шумовая полоса, параметры окна, добавление нулей.

Решение многих практических задач в различных научно-технических, экономических, биологических и других областях часто приводит к необходимости проведения гармонического анализа сигналов или функций путем их разложения в ряд Фурье по тригонометрическим функциям (например [1, 2]). Решение этих задач обычно осуществляется с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ) методами быстрого преобразования Фурье (БПФ), что обусловлено их известными положительными свойствами, среди которых выделяется малая трудоемкость. Однако, ДПФ характеризуется и негативными свойствами. К этим свойствам относится сопровождающие ДПФ несколько источников методических погрешностей, которые во многих случаях могут приводить к низкой точности результатов гармонического анализа и даже к качественному их искажению.

Как известно, источниками основных по значимости методических погрешностей гармонического анализа с помощью ДПФ являются следующие факторы:

ограниченность интервала реального времени наблюдения за исследуемым сигналом, то есть интервала времени, на котором задан исследуемый сигнал;

аппроксимация исследуемых непрерывных сигналов дискретно заданными (решетчатыми) функциями.

Эти факторы являются причинами следующих методических погрешностей гармонического анализа с помощью ДПФ:

в результате ДПФ каждая гармоника исходного сигнала генерирует дополнительное множество побочных гармоник (эта погрешность ДПФ известна как явление размывания (или просачивания) спектральных составляющих [3 — 6]);

амплитудно-частотная характеристика блока ДПФ является колебательной функцией от частоты анализируемого сигнала (эта погрешность известна под термином «паразитная амплитудная модуляция» [4]);

высокочастотные гармонические составляющие могут зеркально отображаться и суммироваться с низкочастотными составляющими (периодическое наложение спектральных составляющих – явление Найквиста).

Рассмотрим первые две методические погрешности, способы их оценок и компенсаций.

Анализ методических погрешностей ДПФ. Поскольку каждый анализируемый сигнал $f(t)$ задан на ограниченном интервале времени $[0,T]$, то непрерывное преобразование Фурье (НПФ) для него

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega\, t)dt \tag{1}$$

приводится к виду

$$F_T(\omega)=\int_{0}^{T} f(t)\exp(-i\omega\, t)dt \tag{2}$$

Применив для численного определения (2) формулу прямоугольников получим известное выражение для дискретно-непрерывного преобразования Фурье (ДНПФ) — дискретного по времени и непрерывного по частоте:

$$F_N(\omega)=\tau\sum_{n=0}^{N-1} f(n\tau)\exp(-i\omega\, n\tau) \quad , \tag{3}$$

где τ − шаг дискретизации по времени непрерывного сигнала.

Задав в (3) дискретный шаг Δ_ω по частоте ω получим выражение для ДПФ:

$$F_N(\omega_k)=\tau\sum_{n=0}^{N-1} f(n\tau)\exp(-i\omega_k n\tau) \quad . \tag{4}$$

где $\omega_k=\Delta_\omega k$ − базисная k-я частота ДПФ.

Обычно в качестве шага по частоте принимают величину $\Delta_\omega = 2\pi/T$, при этом (4) нормируют величиной $T = N\tau$ и используют в виде

$$F_N(\omega_k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n\tau)\exp(-i\omega_k n\tau) \quad , \tag{5}$$

где базисные частоты определяются по формуле:

$$\omega_k = 2\pi k/T\,,\ k=0,...,N-1\,. \tag{6}$$

В данной статье под ДПФ подразумевается преобразование, задаваемое (5) и (6), для которого в настоящее время известны методы быстрого вычисления – методы БПФ .

Далее будем использовать следующие обозначения [2]:

– $F_N(\omega)$ − спектральная плотность (или для краткости – спектр) сигнала $f(t)$;

– $|F_T(\omega)|$, $|F_N(,\omega)|$ − модуль спектра сигнала, причем $|F_T(\omega)|=\sqrt{(\operatorname{Re}F_T(\omega))^2+(\operatorname{Im}F_T(\omega))^2}$;

– $|F(\omega)|^2$, $|F_N(\omega)|^2$ − спектр энергии сигнала $f(t)$.

Для анализа влияния конечности интервала исследуемого сигнала на точность преобразования Фурье подставим в (2) функцию, в качестве которой примем тестовый сигнал [2, 3], содержащий только одну гармонику:

$$f(t)=\exp(\omega_c t), \tag{7}$$

при этом

$$F(\omega,\omega_c)=\int_0^T \exp i((\omega_c-\omega)\,t)dt=\exp(i(\omega_c-\omega)T/2)\int_{-T/2}^{T/2}\exp i((\omega_c-\omega)\,t)dt\,. \tag{8}$$

Отсюда следует выражение для нормированного значением T модуля спектра гармонического сигнала (7), заданного на ограниченном интервале $[0,T]$:

$$|F_T(\omega_c,\omega)|=\left|\exp(i(\omega_c-\omega)T/2)\frac{\sin((\omega_c-\omega)T/2)}{(\omega_c-\omega)T/2}\right|$$

или

$$\left|F_T(\omega_c,\omega)\right| = \left|\frac{\sin((\omega_c-\omega)T/2)}{(\omega_c-\omega)T/2}\right| . \qquad (9)$$

Из (9) видно, что игольчатый (единичный) спектр гармонического сигнала (7) на частоте ω_c размывается преобразованием (2) в бесконечное множество спектральных составляющих из-за ограничения времени наблюдения, что приводит к погрешности вычисления модуля спектра и даже к качественному искажению результатов спектрального анализа сигналов, содержащих несколько спектральных составляющих. Вместо игольчатого спектра имеет место спектр, содержащий центральный (основной) лепесток и ряд боковых лепестков.

Соответственно, ДПФ размывает игольчатый спектр тестового сигнала (7) в конечное множество спектральных составляющих на каждой базисной частоте (6) преобразования (5), которое с учетом (7) запишем в виде

$$F_N(\omega_k,\omega_c) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\exp(i(\omega_c-\omega_k)n\tau) . \qquad (10)$$

Рассмотрим вторую методическую погрешность преобразования Фурье сигнала, заданного в дискретных точках на конечном интервале − неравномерность АЧХ блока ДПФ. В качестве этой характеристики (АЧХ) примем функцию

$$G_N(\omega_c) = \frac{1}{N}\max_{k=0,\dots,N-1}\left|\sum_{n=0}^{N-1}\exp(i(\omega_c-\omega_k)n\tau)\right| , \qquad (11)$$

Использование нами (11) в качестве АЧХ блока ДПФ обусловлено тем, что при непрерывном изменении частоты тестового сигнала результатом ДПФ являются спектральные составляющие, заданные только на базисных частотах (6). При этом, как будет показано ниже, максимальные значения модуля спектра для (10) достигаются только на одной из двух базисных частот (в единственном случае − на двух одновременно), между которыми находится частота тестового сигнала.

Для характеристики неравномерности АЧХ блока ДПФ введём функцию:

$$V_N := \frac{G_N^{\max} - G_N^{\min}}{G_N^{\max}} , \qquad (12)$$

где

$$G_N^{\max} = \max_{\omega_c} G_N(\omega_c), \qquad (13)$$

$$G_N^{\min} = \min_{\omega_c} G_N(\omega_c). \qquad (14)$$

При $\omega_c = \omega_k$ сумма в (11) достигает свой максимум, поскольку все слагаемые в ней имеют при этом один знак и принимают свое максимальное значения, равное единице. Поэтому для (13) имеем $G_N^{\max} = 1$.

С целью определения (14) представим модуль спектра (10), следуя [2] (стр. 393), в виде

$$G_N(\omega_c) = \frac{1}{N}\max_{k=0,\dots,N-1}\left|\frac{\sin((\omega_c\tau - 2\pi k/N)N/2)}{\sin((\omega_c\tau - 2\pi k/N)1/2)}\right|. \qquad (15)$$

Поскольку (11) достигает свое максимальное значение при $\omega_c = \omega_k$, то для определения (14) достаточно провести анализ (15) только на отрезке $[\omega_k, \omega_{k+1}]$ изменения частоты ω_c. С этой целью запишем (11) в виде

$$G_N(\omega_c) = \max\{G_N^k(\omega_c), G_N^{k+1}(\omega_c)\}, \qquad (16)$$

где

$$G_N^k(\omega_c) = \frac{1}{N}\left|\frac{\sin(N\cdot(\omega_c\tau - 2\pi k/N)/2)}{\sin((\omega_c\tau - 2\pi k/N)/2)}\right|, \qquad (17)$$

$$G_N^{k+1}(\omega_c)=\frac{1}{N}\left|\frac{\sin\left(N\cdot(\omega_c\tau-2\pi(k+1)/N)/2\right)}{\sin\left((\omega_c\tau-2\pi(k+1)/N)/2\right)}\right|, \tag{18}$$

$\omega_c\in[\omega_k,\omega_{k+1}]$.

Следует отметить, что (17) и (18) представляют собой зависимости модулей спектральных составляющих $F_N(\omega_k,\omega_c)$ и $F_N(\omega_{k+1},\omega_c)$ реакции (10) блока ДПФ на изменение частоты ω_c тестового сигнала (7) от ω_k до ω_{k+1}. Поэтому выразим ω_c через базисную частоту ω_k:

$$\omega_c=\omega_k+\alpha\,2\pi/T,\ \alpha\in[0,1]. \tag{19}$$

При этом (17) и (18) принимают вид:

$$G_N^k(\alpha)=\frac{1}{N}\left|\sin\alpha\pi/(\sin\alpha\pi/N)\right|, \tag{20}$$

$$G_N^{k+1}(\alpha)=\frac{1}{N}\left|\sin\alpha\pi/(\sin(1-\alpha)\pi/N)\right|. \tag{21}$$

Поскольку функция (20) — монотонно спадающая, а функция (21) — монотонно возрастающая по α на отрезке [0,1], то минимум (17) для (13) достигается в единственной точке − точке решения уравнения

$$\left|\sin\alpha\pi/\sin(1-\alpha)\pi/N\right|=\left|\sin\alpha\pi/\sin(1-\alpha)\pi/N\right|. \tag{22}$$

Этим решением является точка $\alpha=1/2$ (что проверяется подстановкой). Таким образом

$$G_N^{\min}=\frac{1}{N}\left|\frac{\sin\pi/2}{\sin\pi/2N}\right|=\frac{1}{N\left|\sin\pi/2N\right|}. \tag{23}$$

Отсюда при достаточно большом N имеем

$$G_N^{\min}\approx 2/\pi. \tag{24}$$

(24) можно получить путем умножения и деления (23) на $2/\pi$ и перехода к пределу в полученном выражении.

Итак, после подстановки (24) в (12) при $G_N^{\max}=1$ имеем $V_N\approx 0.363$ при достаточно больших N.

Заметим, что из (16) – (19) и (24) следует способ задания и расчета АЧХ блока ДПФ:

$$G_N(\omega_c)=\begin{cases}G_N^k(\omega_c), \text{ при } \omega_k\le\omega_c\le(\omega_k+\omega_{k+1})/2,\\ G_N^{k+1}(\omega_c), \text{ при } (\omega_k+\omega_{k+1})/2<\omega_c\le\omega_{k+1}.\end{cases}$$

Из (22) следует, что неравномерность АЧХ блока ДПФ, реализующего (3), достигает больших значений, что приводит к недопустимым погрешностям решений многих практических задач гармонического анализа.

Способы уменьшения методических погрешностей ДПФ. Из (7) следует известный способ уменьшения размывания спектра анализируемого сигнала путем увеличения интервала T наблюдения за сигналом. При $T\to\infty$ оценка (7) модуля спектра принимает требуемый игольчатый вид. Кроме того, при увеличении T и сохранении шага дискретизации сигнала по времени увеличивается размер N выборки, что приводит к уменьшению расстояния между базисными частотами, то есть к увеличению разрешающей способности по частоте ДПФ. Однако такой способ далеко не всегда приемлем из-за увеличения времени получения исходной информации для ДПФ и к увеличению трудоемкости численных расчетов при выполнении ДПФ даже с помощью методов быстрого преобразования Фурье. Поэтому для уменьшения влияния эффекта размывания спектра обычно применяют оконные функции, на анализе свойств которых остановимся в следующем разделе.

Для уменьшения неравномерности АЧХ блока ДПФ можно использовать также два способа. Первый способ заключается в дополнение нулями исходной выборки обрабатываемого сигнала. Этот способ обычно рекомендуется применять [5,7,8] для увеличения избирательности оценивания частот узкополосных спектральных пиков. Оказывается, данный способ приводит и к уменьшению неравномерности АЧХ и, соответственно, погрешностей, связанных с неравномерностью АЧХ. Действительно, запишем формулу (3) ДПФ для случая, когда выборка исходной функции $f(n\tau)$, $n = 0,...,N-1$ дополнена N нулями:

$$F_{N_0}(\omega_k) = \tau \sum_{n=0}^{2N-1} f(n\tau)\exp(-i\omega_k\, n\tau) = \tau \sum_{n=0}^{N-1} f(n\tau)\exp(-i\omega_k\, n\tau), \qquad (25)$$

где

$$\omega_k = \pi k/T,\ k = 0,...,2N-1. \qquad (26)$$

Как видно из (25) и (26), дополнение нулями исходной выборки сигнала приводит к уменьшению расстояния между базисными частотами. Подставляя (7) в (25) получаем формулу для $F_{N_0}(\omega_c)$ − нормированного дискретного спектра тестовой функции, заданной на отрезке $[0,T]$ и дополненной нулями. Выражение для $F_{N_0}(\omega_c)$ совпадает с (10), с той лишь разницей, что ω_k определяется при этом не из (6), а из (26). Изменение ω_k приводит к изменению формулы типа (15) для АЧХ:

$$G_{N_0}(\omega_c) = \frac{1}{N} \max_{k=0,...,2N-1} \left| \frac{\sin((\omega_c\tau - 2\pi k/N)N/2)}{\sin((\omega_c\tau - 2\pi k/N)1/2)} \right| \qquad (27)$$

Из (27) можно получить, соответственно, формулы для $G^k_{N_0}(\omega_c)$ и $G^{k+1}_{N_0}(\omega_c)$, которые отличаются от (17) и (18) только множителем π/N при k и $k+1$ в числителях и знаменателях. После подстановки в эти формулы для $G^k_{N_0}(\omega_c)$ и $G^{k+1}_{N_0}(\omega_c)$ выражения типа (18) для частоты тестового сигнала

$$\omega_c = \omega_k + \alpha\pi/T, \qquad \alpha \in [0,1],$$

получаем формулы типа (20), (21):

$$G^k_{N_0}(\alpha) = \frac{1}{N}\left|\sin\alpha\pi/(\sin\alpha\pi/2N)\right|,$$

$$G^{k+1}_{N_0}(\alpha) = \frac{1}{N}\left|\sin\alpha\pi/(\sin(1-\alpha)\pi/2N)\right|.$$

Отсюда также получим $\alpha = 1/2$ в качестве решения уравнения типа (20) для рассматриваемого случая добавления N нулей. Следовательно:

$$G^{\min}_{N_0} = \frac{1}{N}\left|\frac{\sin\pi/4}{\sin\pi/4N}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}N\left|\sin\pi/4N\right|},$$

то есть $V_{N_0} \approx 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx 0.0997$ при больших N.

Таким образом, добавление N нулей к исходной выборке анализируемого сигнала приводит к уменьшению неравномерности АЧХ блока ДПФ с 0.363 до 0.0997.

Аналогично можно показать, что добавление $3N$ нулей к исходной выборке анализируемого сигнала приводит к еще большему уменьшению неравномерности АЧХ – до 0.0255, то есть удвоение объема выборки за счет добавления нулей приводит к, примерно, четырехкратному уменьшению неравномерности АЧХ спектра ДПФ. Однако, такой способ уменьшения рассматриваемой методической погрешности ДПФ приводит к многократному увеличению трудоемкости выполнения ДПФ, что не всегда приемлемо.

Вторым способом уменьшения неравномерности АЧХ, приводящим также и к уменьшению размывания спектра, является применение подходящих оконных функций $w(t)$ (окон), отличающихся от прямоугольного окна, которое неявно используется в (3) и имеет вид:

$$w(t)=\begin{cases}1, \text{ при } t\in[0,T],\\ 0, \text{ при } t\notin[0,T].\end{cases}$$

Назначение оконных функций состоит в сглаживании значений исследуемой функции времени на концах интервала ее наблюдения, с целью уменьшения методических погрешностей ДПФ и улучшения качества гармонического анализа.

Нормированный выходной сигнал блока ДПФ, в котором используется оконная функция, при тестовом входном сигнале (5) имеет вид

$$F_N(\omega_k,\omega_c)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}w(n\tau)\exp\left(i(\omega_c-\omega_k)n\tau\right) \quad , \tag{28}$$

где $\omega_k=2\pi k/T$, $k=0,...,N-1$.

Сравнивая (3) и (28), можно заметить, что последнее равенство представляет собой дискретно-непрерывное преобразование Фурье (дискретное по времени и непрерывное по частоте) оконной функции $w(t)$ на частоте $\omega_c-\omega_k$, где ω_c − непрерывная частота, ω_k − фиксированное смещение непрерывной частоты ω_c на ω_c. Отсюда следует, что задачу улучшения качества блока ДПФ с оконной функцией при тестовом входном сигнале (5) можно свести к задаче синтеза оконной функции, которая обеспечивает требуемые показатели качества преобразования Фурье. Формулировка и решение этой задачи обуславливает необходимость введения ряда параметров оконных функций для количественной характеристики их свойств, которые влияют на точностные характеристики дискретного преобразования Фурье, составной частью которого является та или иная оконная функция.

В последующих разделах статьи рассматриваются основные свойства и параметры оконных функций.

Свойства и параметры оконных функций. Положим, что неравные тождественно нулю рассматриваемые оконные функции $w(t)$ на отрезке $[0,T]$ их задания являются:

а) непрерывными и четными относительно $T/2$ (т.е $w(T/2+t)=w(T/2-t)$)

б) монотонно невозрастающими на $[0,T/2]$ и монотонно неубывающими на $[T/2,T]$;

в) равными нулю при $t\in[0,T]$.

Практически все известные в литературе оконные функции удовлетворяют перечисленным условиям, из которых следуют полезные для синтеза оконных функций свойства их преобразований Фурье:

$$W(\omega)=\int_0^T w(t)e^{-i\omega t}dt\,. \tag{29}$$

Рассмотрим эти свойства, для чего приведем (29) к виду

$$W(\omega)=e^{-i\omega T/2}\left(\int_{-T/2}^{T/2}w(T/2+t)\cos(\omega t)dt-i\int_{-T/2}^{T/2}w(T/2+t)\sin(\omega t)dt\right).$$

Поскольку $w(T/2+t)$ является четной функцией, то

$$W(\omega)=e^{-i\omega T/2}\left(\int_{-T/2}^{T/2}w(T/2+t)\cos(\omega t)dt\right). \tag{30}$$

Рассмотрим свойства модуля функции (30):

$$|W(\omega)|=\left|\int_{-T/2}^{T/2}w(T/2+t)\cos(\omega t)dt\right| \tag{31}$$

на отрезке $\left[-2\pi/T, 2\pi/T\right]$. Для этого, в силу четности подынтегральной функции в (31) по ω на рассматриваемом интервале, рассмотрим свойства функции

$$\widetilde{W}(\omega)=\int_{-T/2}^{T/2} w(T/2+t)\cos(\omega t)dt\ ,\ \omega\in\left[0,2\pi/T\right]. \tag{32}$$

Утверждение 1. Если оконная функция удовлетворяет условиям а) – в), то
1) $\widetilde{W}(\omega)=\left|W(\omega)\right|>0$, $\omega\in\left[0,2\pi/T\right)$;
2) $\widetilde{W}'(\omega)<0$, $\omega\in\left(0,2\pi/T\right)$.

Доказательство. Вначале покажем, что $\widetilde{W}(\omega)>0$, $\omega\in\left[0,2\pi/T\right)$. Очевидно, что $\widetilde{W}(0)>0$. Далее, в силу четности $w(t)$

$$\widetilde{W}(\omega)=2\int_{0}^{T/2} w(T/2+t)\cos(\omega t)dt=\frac{2}{\omega}\left(\sin(\omega T/2)w(T)-\int_{0}^{T/2} w'(T/2+t)\sin(\omega t)dt\right)>0,$$

поскольку $\sin(\omega T/2)w(T)>0$ для $\omega\in\left(0,2\pi/T\right)$ и $w'(T/2+t)\sin(\omega t)\le 0$ для $t\in\left[0,T/2\right]$ и $\omega\in\left(0,2\pi/T\right)$. Таким образом доказано 1).

Из доказанного 1) следует существование производной

$$\widetilde{W}'(\omega)=-2\int_{0}^{T/2} tw(T/2+t)\sin(\omega t)dt$$

поэтому для выполнения условия $\widetilde{W}'(\omega)<0$ при $\omega\in\left(0,2\pi/T\right)$ необходимо, чтобы

$$\int_{0}^{T/2} tw(T/2+t)\sin(\omega t)dt>0\ ,\ \omega\in\left(0,2\pi/T\right).$$

Это следует из того, что $tw(T/2+t)\sin(\omega t)>0$ при $t\in\left[0,T/2\right]$ при любых $\omega\in\left(0,2\pi/T\right)$. утверждение 1 доказано.

Следствие 1. Если условия утверждения 1 выполнены, то $\widetilde{W}'(\omega)>0$, $\widetilde{W}'(\omega)=-\widetilde{W}'(-\omega)$ на интервале $\left(0,2\pi/T\right)$.

При синтезе оконных функций (при выборе типов окон и их параметрической оптимизации с целью достижения требуемого качества результата преобразования (28)) будем использовать кроме определенных выше общих свойств оконных функций следующие их параметры.

Масштабный коэффициент спектра оконной функции (МКСО) (коэффициент передачи блока ДПФ) характеризует потери при спектральном преобразовании, связанные с формой оконной функции

$$L_w=W(0)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} w(n\tau). \tag{33}$$

и определяется из (28) при $\omega_c=\omega_k$. Заметим, что (33) совпадает с максимальным значением АЧХ спектра оконной функции.

Неравномерность амплитудно-частотной характеристики дискретного спектра оконной функции — спектра блока ДПФ с оконной функцией — будем характеризовать параметром типа (12):

$$V_w:=\frac{W_w-G_w^{\min}}{W_w}, \tag{34}$$

где W_w − выполняет такую же роль, как и (13) для (12);

$$G_w^{\min}=\min_{\omega_c} G_{wN}(\omega_c)$$

$$G_{wN}(\omega_c)=\frac{1}{N}\max_{k=0,\dots,N-1}\left|\sum_{n=0}^{N-1} w(n\tau)\exp\left(i(\omega_c-\omega_k)n\tau\right)\right|. \tag{35}$$

Минимальное значение (35) АЧХ спектра определяется формулой

$$G_w^{\min} = W(\pi/T). \tag{36}$$

При доказательстве (36) используем тот факт, что дискретно-непрерывное преобразование (28) при большом N стремится к непрерывному преобразованию Фурье (29) оконной функции, смещенному на ω_k. Таким образом, модуль для (28) является четной относительно своего значения при $\omega_c = \omega_k$ и монотонно убывающей функцией на отрезке $[0, 2\pi/T]$ (что определено утверждением 1). Поэтому, повторяя те же рассуждения, что и при получении (22), приходим к выводу, что минимальное значение для модуля (35) достигается в точках $\omega_c = \omega_k + \pi/T$, $k = 0,...,N-1$, которые находятся из решения уравнения

$$W(\omega_c) = W(\omega_c - 2\pi/T). \tag{37}$$

Поскольку оконные функции не полностью устраняют неравномерность АЧХ, то совместно с ними можно применять дополнение нулями исходной выборки сигнала, которое приводит к дополнительному уменьшению неравномерности АЧХ блока ДПФ. При этом дополнении N нулями исходной выборки минимальное значение (35) АЧХ спектра блока ДПФ с окном можно вычислять по формуле

$$G_{wN_0}^{\min} = W(\pi/2T) \tag{38}$$

Действительно, запишем выходной сигнал блока ДПФ с оконной функцией и при дополнении N нулями исходной выборки сигнала (7) в виде:

$$F_{N_0}(\omega_k, \omega_c) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} w(n\tau)\exp(i(\omega_c - \omega_k)n\tau) \quad , \tag{39}$$

где $\omega_k = \pi k/T$, $k = 0,...,N-1$.

Далее повторяя рассуждения, как и при выводе (22), получим для рассматриваемого случая уравнение

$$W(\omega_c) = W(\omega_c - \pi/T) \ , \ 0 \le \omega_c \le \pi/T ,$$

решением которого является (38).

Аналогичным образом можно получить зависимость для (31) и в случае дополнения большим числом нулей исходной выборки сигналов.

Отметим, что параметр (34) близок по смыслу к параметру «амплитудная модуляция»

$$A_w = \left|\frac{W\left(\frac{\pi}{T}\right)}{W(0)}\right|, \tag{40}$$

который приведен без доказательства в [4] для случая, когда отсутствует дополнение нулями исходной выборки сигнала.

В таблице приведены значения параметра (34) — неравномерности АЧХ блока ДПФ с разными типами оконных функций и с разными количествами добавленных нулей (все оконные функции таблицы и их параметры, кроме функции $\sin^8(\pi t)$ и $\sin^{16}(\pi t)$, рассмотрены в [4, 7]; функции $\sin^\alpha(\pi t)$ в этой таблице и далее заданы на нормированном отрезке $[0, T]$ при $T = 1$; формулы и отрезки задания для остальных функций приведены в [4], [7]). Способ, с помощью которого были вычислены коэффициенты неравномерности АЧХ для этой таблицы, рассмотрен в 4-ом разделе.

Оконная функция		V (без нулей)	V^0 (N нулей)	V^0 ($3N$ нулей)
Прямоугольная		0.3634	0.0997	0.0255
$\sin^{\alpha}(\pi t)$	**α=1**	0.2146	0.0572	0.0145
	α=4	0.0946	0.0244	0.0062
	α=8	0.0539	0.0137	0.0035
	α=16	0.0290	0.0073	0.0018
Хэмминга		0.1826	0.0486	0.0123
Рисса		0.2260	0.0603	0.0153
Римана		0.1957	0.0520	0.0132
Валле-Пуссена		0.0982	0.0254	0.0064
Бомана		0.1111	0.0288	0.0073
Пуассона	**α=2.0**	0.2087	0.0562	0.0143
	α=3.0	0.1525	0.0407	0.0103
	α=4.0	0.1111	0.0294	0.0074
Коши	**α=2.0**	0.1749	0.0469	0.0119
	α=3.0	0.1423	0.0380	0.0097
	α=4.0	0.1196	0.0319	0.0080
Гаусса	**α=2.5**	0.1663	0.0441	0.0112
	α=3.0	0.1253	0.0328	0.0083
	α=3.5	0.0953	0.0247	0.0062
Кайзера-Бесселя	**α=2.0**	0.1537	0.0405	0.0103
	α=2.5	0.1289	0.0337	0.0085
	α=3.0	0.1109	0.0288	0.0073
	α=3.5	0.0972	0.0252	0.0063
Блэкмана (92 дБ)		0.0907	0.0234	0.0059

Максимальный уровень боковых лепестков спектра оконной функции будем определять формулой вида [4]:

$$S_w = \frac{M_w}{L_w}, \tag{41}$$

где M_w — максимальное значение модулей спектральных составляющих боковых лепестков.

Ширина главного лепестка спектра оконной функции. Рассмотрим случай, когда анализируемый сигнал представляет собой сумму двух равных по амплитуде сигналов, интервалы частотных спектров которых расположены близко друг от друга или, вообще, перекрываются. Для различимости центральных пиков спектральных составляющих каждого сигнала уровень паразитных составляющих, обусловленных размыванием анализируемых центральных пиков, в точках наложения этих паразитных спектральных составляющих не должен превышать половины амплитуды анализируемых центральных пиков. Поэтому расстояние в частотной области между анализируемыми центральными спектральными пиками должно быть не менее отрезка частотного интервала задания главного лепестка, внутри которой модуль спектра оконной функции может превышать уровень $0.5W(0)$. В случае ДПФ данный параметр измеряется в бинах [4] и формула для него имеет вид:

$$\varDelta_w = \frac{(f_1 - f_2)}{\varDelta_f}, \tag{42}$$

где f_1 и f_2 – такие границы частотного минимального интервала, для которых $W(f_1) = W(f_2) = W(0)/2$, $f_1 + f_2 = 0$; Δ_f – расстояние между соседними базисными частотами. Отметим, что в параметре (42) учитывается монотонное убывание функции $W(\omega)$ на отрезке $[0, 2\pi/T]$, которое следует из утверждения 1..

Коэффициент размытости спектра оконной функции. Для оценки интегральной размытости модуля спектра оконной функции введем коэффициент размытости спектра оконной функции в следующем виде:

$$K_w = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \left| W(\Omega n) \right|}{\left| W(0) \right|}, \tag{43}$$

где $W(\Omega n)$ – модуль спектра на частоте Ωn изображения Фурье оконной функции $w(t)$; $\Omega = 2\pi/T$ – шаг по частоте, который в случае ДПФ равен расстоянию между соседними базисными частотами в ДПФ, в случае непрерывного преобразования Фурье этот шаг должен быть выбран по критерию точности интегрирования.

Коэффициент (43) нами введен взамен распространенного параметра — эквивалентной шумовой полосы (ЭШП) оконной функции [4]. ЭШП трактуется как ширина полосы пропускания некоторого условного прямоугольного частотного фильтра, который характеризуется суммарной мощностью всех составляющих спектра оконной функции и коэффициент усиления которого равен масштабному коэффициенту преобразования оконной функции:

$$E_w = E(w) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \left| W(n\Omega) \right|^2}{\left| W(0) \right|^2} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n\tau)}{\left(\sum_{n=0}^{N-1} w(n\tau) \right)^2}, \tag{44}$$

ЭШП измеряется также, как и (42), в бинах, число которых равно ширине полосы частот, деленной на шаг по частоте между базисными частотами в ДПФ. Достоинством ЭШП является малая трудоемкость его вычисления, поскольку все расчеты можно вести во временной области. Это служит предпосылкой для обеспечения высокой точности вычисления ЭШП. Коэффициент же размытости (43) вычисляется только в частотной области, что менее удобно. Однако, ЭШП имеет, по нашему мнению, существенный недостаток, который заключается в ограниченной области его применения. Действительно, размытый спектр оконной функции являются сугубо детерминированной функцией, поэтому применение в качестве оценки для неё среднеквадратичной величины (знаменателя в (44)) в общем случае не является обоснованным. При этом объединение в единую сумму квадратичных значений модулей спектральных составляющих детерминированной функции может приводить, практически, к полной потере влияния достаточно больших значений спектральных составляющих паразитных боковых лепестков на значение оценки. Этот эффект является весьма нежелательным при спектральном анализе информационных сигналов. В отличие от (44) в (43) используются первые степени модулей спектральных составляющих, что приводит к выравниванию влияния всех составляющих боковых лепестков независимо от их величины на оценку (43). Заметим, что целесообразность применения ЭШП, по-видимому, имеет место в случае вычисления частотного спектра мощности, рассеиваемой источником энергии (источником тока или напряжения на резисторе, динамиком, источником физического взрыва и др.).

Отметим, что приводимая ниже процедура численного определения параметров окон на основе их дискретного преобразования Фурье позволяет с требуемой точностью определять и коэффициент размытости (43) для произвольных оконных функций.

Подставка. Существенным параметром оконной функции является ее минимальные значения на концах интервала ее задания, то есть ее подставка:

$$h_w = \min_{n=0,\ldots,N-1} w(n\tau). \tag{45}$$

Наличие и величина ненулевой подставки является весьма важным свойством при использовании оконной функции в задачах, в которых вычисления производятся с фиксированной запятой. В этих случаях, если оконная функция приближена к нулевому значению на больших расстояниях от своих краев, происходит практическая потеря части выборки сигналов. Таким недостатком обладают, например, некоторые сконструированные в [9] оконные функции.

Приведенные параметры в большинстве практических задач относятся к основным параметрам оконных функций. Некоторые из этих параметров в конкретных приложениях могут переходить в разряд вспомогательных. Например, в случае вычислений с плавающей запятой параметр (33) играет несущественную роль, поэтому его обычно можно даже не учитывать при синтезе оконных функций.

Кроме приведенных выше рассмотрим несколько вспомогательных параметров.

Обобщенный параметр оконной функции. Увеличение подставки в оконной функции приводит к уменьшению скорости спада боковых лепестков. Это является подтверждением противоречивости и взаимозависимости параметров окон. Почти всегда улучшение одних параметров оконной функции, влечет за собой ухудшение других. Поэтому для выбора оптимального окна в работе [4] была введена и в [9] использовалась так называемая обобщенная характеристика, которая определяется как разность ЭШП и ширины окна по уровню 3 дБ, соотнесенная к ширине окна по уровню 3 дБ. Однако, на наш взгляд такой параметр является не совсем корректным, поскольку ширина окна по уровню 3 дБ определяется по модулю спектра, в то время как ЭШП, по определению, является характеристикой спектра энергии (мощности), т.е. квадрата модуля спектра. В качестве близкого по смыслу к обобщенной характеристике [4] можно предложить следующий параметр оконной функции

$$P_w = \varDelta_w / K_w . \qquad (46)$$

Как показали численные расчеты, для всех “хороших” окон параметр (46) лежит в пределах $0.89 - 0.96$. Если этот показатель лежит вне этого диапазона, то окна имеют для данного уровня боковых лепестков слишком широкий центральный лепесток, либо при недостаточно узком центральном лепестке слишком высокий уровень боковых лепестков. Параметр (46), по нашему мнению, целесообразно использовать только в качестве вспомогательного ограничения при параметрической оптимизации оконных функций путем решения задачи нелинейного программирования, поскольку он несет в себе косвенную характеристику об основных параметрах оконной функции.

Скорость спада боковых лепестков. В [4, 7] рассматривается такой параметр оконных функций, как скорость спада боковых лепестков . Определение этого параметра сводится к определению степени гладкости оконной функции при $t = 0$: если $w(0) > 0$, то в непрерывном преобразовании Фурье окна появляется ядро Дирихле, и соответственно боковые лепестки не могут спадать быстрее, чем $-6\,дБ/октава$, если же $w^{(i)}(0) = 0\ i = 0,\ldots k-1$, $w^{(k)}(0) \neq 0$ (где k – порядок производной по аргументу оконной функции), то скорость спада боковых лепестков составляет $-6 \cdot (k+2)\,дБ/октава$. Скорость спада боковых лепестков является вспомогательным параметром и не представляет самостоятельный интерес. Подтверждением этого является существование известных оконных функций, которые имеют, вообще, нулевую скорость спада, но относятся к хорошим функциям из-за своих остальных параметров, например функции Чебышева и Дольфа-Чебышева. Тем не менее, скорость спада боковых лепестков в совокупности с другими параметрами типа, например максимальным уровнем боковых лепестков (41), с шириной главного лепестка (42), с неравномерностью АЧХ (34), увеличивает уровень представления о качестве оконной функции.

Литература

1.Заездный А.М. Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи.- Л., «Энергия», 1972, 527 с.

2. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы.- М., «Радио и связь», 1986, 511 с.

3.Хэмминг Р.В. Численные методы.- М., «Наука», 1972, 397 с.

4. Хэррис Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье// ТИИЭР, 1978, т.66, №1, с. 60 − 96.

5. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов.- М., «Мир», 1982, 427 с.

6. Рабинер, Л., Гоулд, Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. − М.: Мир, 1978. − 848 с.

7. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложение.- М., «МИР». 1990, 584 с.

8. Гадзиковский В.И. Теоретические основы цифровой обработки сигналов.-М.Радио и связь, 2004, 343 с.

9. Дворкович А. В. Новый метод расчета эффективных оконных функций, используемых при гармоническом анализе с помощью ДПФ// Цифровая обработка сигналов, 2001, №2, с. 49 − 54.

ГОДЛЕВСКИЙ Виталий Станиславович, д-р техн. наук, директор МП «ДИСИТ» НАН Украины. В 1966 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований – моделирование, оптимизация режимов и диагностика технических систем, аналоговая и цифровая обработка сигналов.

ДЕНИСЕНКО Александр Михайлович, мл. научн. сотрудник Института проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 2000 г. окончил Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко. Область научных исследований – цифровая обработка сигналов.