УДК 621,372
В.С. Годлевский В.С., д-р техн, наук,
А.М. Денисенко
Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044)4247162, e-mail: disit@svitonline,com

Численный синтез оконных функций для дискретного преобразования Фурье

Приведен и обоснован способ численного расчета основных точностных показателей блока дискретного преобразования Фурье с оконной функцией. Задача выбора аргументов оконных функций сводится к задаче нелинейного программирования. Представлены несколько новых оконных функций и их параметры.

К л ю ч е в ы е с л о в а: дискретное преобразование Фурье, оконная функция, паразитная модуляция, коэффициент размытости спектра, главный лепесток, боковой лепесток, эквивалентная шумовая полоса.

В работе [1] рассмотрены известные и введены новые параметры оконных функций, которые применяются большинстве программных пакетов, приборов и устройств, предназначенных для выполнения цифровой обработки сигналов с помощью аппарата дискретного (быстрого) преобразования Фурье (ДПФ). Это обусловлено, прежде всего, тем, что введение оконных функций приводит к уменьшению уровня боковых лепестков при ДПФ гармонического сигнала и позволяет уменьшить неравномерность амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) блоков ДПФ [1]. Однако, введение оконных функций приводит не только к улучшению определенных показателей блоков ДПФ, но, к сожалению, является причиной ухудшения их остальных показателей. В настоящее время известно достаточно большое число оконных функций, имеющих различные показатели влияния на параметры блоков ДПФ. Это объясняется тем, что не существует идеальной функции, которая полностью устраняет методические погрешности ДПФ. Поэтому при решении конкретной задачи цифровой обработки сигналов целесообразно выбирать подходящую оконную функцию среди известных или конструировать новую функцию с учетом специфики решаемой задачи. Рассматриваемый формализованный способ численного синтеза оконных функций сводится к оптимизации некоторых параметров этих функций при установленных ограничениях на величины остальных параметров.

Для функции $f(t)$, заданной на ограниченном интервале времени $[0,T]$, в случае применения оконной функции $w(t)$ ДПФ имеет вид

$$F_N(\omega_k)=\tau\sum_{n=0}^{N-1}w(n\tau)f(n\tau)\exp(-i\omega_k n\tau), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega_k}$ − базисная k-я частота ДПФ $\omega_k=\varDelta_\omega k$; τ и $\varDelta_\omega$ — шаг дискретизации соответственно по времени и частоте; $N\tau=T$.

Будем полагать, что исходное непрерывное преобразование Фурье

$$F_T(\omega)=\int_0^T f(t)\exp(-i\omega t)dt \tag{2}$$

также содержит оконную функцию, равную единице на отрезке $[0,T]$ и нулю вне этого интервала. В качестве шага по частоте примем величину $\varDelta_\omega=2\pi/T$. После нормирования величиной $T=N\tau$ приводим к виду

$$F_N(\omega_k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}w(n\tau)f(n\tau)\exp(-i\omega_k n\tau) \quad ,$$

где базисные частоты определяются по формуле $\omega_k = 2\pi k / T$, $k = 0,...,N-1$.

Далее положим, что не равные тождественно нулю рассматриваемые оконные функции $w(t)$ на отрезке $[0,T]$ являются:

1) непрерывными и четными относительно $T/2$ (т,е $w(T/2+t) = w(T/2-t)$);

2) монотонно невозрастающими на $[0,T/2]$ и монотонно неубывающими на $[T/2,T]$;

3) равными нулю при $t \in [0,T]$.

Будем использовать для анализа и синтеза оконных функций известные (например, [2]) и введенные в [1] их параметры.

Масштабный коэффициент спектра оконной функции (коэффициент передачи блока ДПФ) характеризует потери при спектральном преобразовании, обусловленные применением оконной функции:

$$L_w = W(0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} w(n\tau), \tag{3}$$

где $W(0) = W(i\omega)$ при $\omega = 0$; $W(i\omega)$ – изображение по Фурье оконной функции.

Неравномерность АЧХ дискретного спектра оконной функции **(**спектра блока ДПФ с оконной функцией) определяется выражением [1]

$$V_w = \frac{W(0) - G_w^{\min}}{W(0)}, \tag{4}$$

где $G_w^{\min}$ – минимальное значение АЧХ блока ДПФ с оконной функцией, $G_w^{\min} = W(\pi/T)$. Как показано в [1], одним из способов уменьшения неравномерности АЧХ блока ДПФ для улучшения качества обработки преобразуемого сигнала является дополнение нулями исходной выборки обрабатываемого сигнала [1, 3, с, 65]. При дополнении исходной выборки размерности N нулевыми элементами до размера $\boldsymbol{N_0 = rN}$, параметр (4) принимает вид

$$V_w^0 = \frac{W(0) - G_{wN_0}^{\min}}{W(0)},$$

где $G_{wN_0}^{\min} = W(\pi/(rT))$, Таким образом, учитывая утверждение 1 из работы [1], при $r \ge 2$ получаем $V_w^0 < V_w$.

Максимальный уровень боковых лепестков спектра оконных функций [2] запишем в виде

$$S_w = \frac{M_w}{L_w}, \tag{5}$$

где M_w – максимальное значение модулей спектральных составляющих боковых лепестков.

Ширина главного лепестка спектра оконной функции [2] имеет вид

$$\varDelta_w = \frac{(f_1 - f_2)}{\varDelta_f}, \tag{6}$$

где f_1 и f_2 – такие границы частотного минимального интервала, для которых $W(f_1) = W(f_2) = W(0)/2$; $\varDelta_f$ – расстояние между соседними базисными частотами.

Коэффициент размытости спектра оконной функции [1] определяется выражением

$$K_w = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |W(\Omega n)|}{|W(0)|}, \tag{7}$$

где $W(\Omega n)$ – модуль спектра на частоте Ωn изображения Фурье оконной функции $w(t)$; $\Omega = 2\pi/T$ – шаг по частоте, который в случае ДПФ равен расстоянию между соседними базисными частотами в ДПФ.

Эквивалентная шумовая полоса [2]

$$E_w = E(w) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \left| W(n\Omega) \right|^2}{\left| W(0) \right|^2} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n\tau)}{\left(\sum_{n=0}^{N-1} w(n\tau) \right)^2} \tag{8}$$

измеряется, как и (7), в бинах, число которых равно ширине полосы частот, деленной на шаг по частоте между базисными частотами в ДПФ.

Подставка [1] имеет вид

$$h_w = \min_{n=0,\dots,N-1} w(n\tau), \tag{9}$$

Гибридный (обобщенный) параметр оконной функции [1]

$$P_w = \Delta_w / K_w, \tag{10}$$

косвенно характеризует основные параметры оконной функции.

Важной для численного анализа и синтеза оконных функций является задача вычисления параметров оконных функций с требуемой точностью.

Вычисление параметров оконных функций. Вычисление параметров (3), (8), (9) можно проводить во временной области непосредственно по виду оконной функции, что не сопряжено со сложностями и является определенным их достоинством. Вычисление параметров (4) – (7), (10) приводит к необходимости расчетов в частотной области с помощью непрерывных преобразований Фурье (НПФ) оконных функций. Однако получение аналитических зависимостей НПФ для многих оконных функций либо сопряжено со значительными трудностями, либо практически не представляется возможным. В таких случаях целесообразно использовать ДПФ оконных функций для вычисления их параметров в частотной области:

$$W_N(\omega_k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w(n\tau) \exp(-i\omega_k n\tau) \quad , k = 0,1,2,\dots,N-1. \tag{11}$$

Значение N в (11) должно быть достаточно большим для обеспечения приемлемой точности вычисления интеграла (2) по формуле прямоугольников. Для увеличения точности вычисления некоторых параметров можно применять дополнение нулями исходной выборки дискретных значений $w(n\tau)$, $n = 0,\dots,N-1$, функции $w(t)$. Дополнение нулями позволяет выполнить переход от дискретного ряда Фурье (11) для N гармоник с частотами ω_k ($k = 0,\dots,N-1$) функции $w(t)$ к дискретному ряду Фурье для rN ($r = 2,4,\dots$) гармоник этой же функции, что увеличивает информативность представления в частотной области исходной оконной функции. Действительно, пусть значения оконной функции $w(n\tau)$ $(n = 0,\dots,N-1)$ дополнены нулевыми значениями $w(N\tau),\dots,w((2N-1)\tau))$. ДПФ этой дополненной нулями $2N$-точечной последовательности данных определяется выражением

$$W_{2N}(\omega_k) = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{2N-1} w(n\tau) \exp(-i\omega_k\, n\tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w(n\tau) \exp(-i\omega_k\, n\tau), \tag{12}$$

где $\omega_k = \dfrac{2\pi}{2T} k = \dfrac{\pi}{N\tau} k$, $k = 0,1,2,\dots,2N-1$; $w_n = w(n\tau)$. Из (12) видно, что члены с четными значениями индекса k $2N$-точечного дискретного ряда Фурье образуют N-точечный ряд (11). Члены ряда (12) с нечетными значениями индекса k соответствуют интерполированным значениям ДПФ функции $w(t)$, расположенным между значениями исходного N-точечного преобразования. Очевидно, что чем больше нулей добавляем в исходную последовательность, тем больше получаем интерполированных данных. Следовательно, добавление нулей является формальным способом уменьшения шага по частоте между соседними спектральными составляющими спектра оконной функции, определяемого с помощью ДПФ, при заданном числе N ее значений на отрезке времени $\left[0,T\right]$. При бесконечном числе добавляемых нулей ДПФ можно рассматривать как дискретно-непрерывное преобразование Фурье исходной N-точечной последовательности данных оконной функции:

$$W(\omega)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}w(n\tau)\exp(-i\omega n\tau).$$

Следует заметить, что добавление нулей эквивалентно переходу от спектрального анализа оконной функции $w(t)$ на интервале $\left[0,T\right]$ к спектральному анализу этой же функции на интервале $\left[0,rT\right]$.

Таким образом, задача вычисления параметров оконной функции сводится, к вычислению ДПФ

$$W(\omega_k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}w(n\tau)\exp(-i\omega_k\, n\tau) \tag{13}$$

где $\omega_k=\dfrac{2\pi}{rT}k=\dfrac{2\pi}{rN\tau}k$, $k=0,1,2,\dots,rN-1$.

В табл. 1 приведены определенные с помощью (13) параметры оконных функций. Были использованы $N=128$ временных отсчетов оконных функций на интервале $\left[0,T\right]$, которые дополнялись нулями до $rN=16384$. В отличие от аналогичной из таблицы [2] табл.1 введены параметры $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{P}$, оконные функции $w(t)=\sin^8(\pi t)$ и $w(t)=\sin^{16}(\pi t)$, при этом значения параметров вычислены с большей точности.

Таблица 1.

Оконная функция	Δ ,бин	V	S , %	K	E , бин	h	P	L
Прямоугольая:	1,211	0,3634	21,627	2,967	1,000	1,000	0,411	1,000
$\sin^{\alpha}(\pi t)$								
α=1	1,641	0,2146	7,0795	1,859	1,234	0	0,882	0,637
α=4	2,000	0,0946	0,4624	2,688	1,944	0	0,966	0,375
α=8	3,500	0,0539	0,0186	3,663	2,627	0	0,955	0,273
α=16	4,282	0,0290	$4{,}6\cdot10^{-3}$	5,102	3,629	0	0,947	0,196
Хэмминга	1,813	0,1826	0,7328	2,049	1,363	0,080	0,884	0,540
Рисса	1,594	0,2260	8,6099	1,855	1,200	0	0,858	0,667
Римана	1,734	0,1957	4,7863	1,887	1,299	0	0,919	0,589
Валле-Пуссена	2,555	0,0982	0,2239	2,674	1,917	0	0,958	0,375
Бомана	2,375	0,1111	0,5012	2,475	1,790	0	0,960	0,405
Пуассона:								
α=2	1,703	0,2087	10,965	2,525	1,313	0,135	0,674	0,432
α=3	2,086	0,1525	5,6885	3,205	1,657	0,049	0,654	0,317
α=4	2,586	0,1111	2,5410	4,082	2,075	0,018	0,635	0,245
Коши:								
α=2	1,906	0,1749	2,8184	2,674	1,489	0,100	0,713	0,416
α=3	2,219	0,1423	5,0119	3,195	1,776	0,059	0,695	0,331
α=4	2,547	0,1196	2,7227	3,759	2,075	0,038	0,677	0,275
Гаусса:								
α=2,5	1,922	0,1663	0,6918	2,146	1,446	0,044	0,895	0,495
α=3,0	2,258	0,1253	0,1567	2,439	1,702	0,011	0,928	0,417
α=3,5	2,625	0,0953	0,0282	2,809	1,977	0,002	0,935	0,358
Кайзера–Бесселя:								
α=2,0	2,000	0,1537	0,5129	2,114	1,502	0	0,954	0,487
α=2,5	2,211	0,1289	0,1303	2,309	1,658	0	0,960	0,438
α=3,0	2,398	0,1109	0,0327	2,513	1,802	0	0,957	0,401
α=3,5	2,578	0,0972	0,0081	2,710	1,936	0	0,958	0,372
Блэкмана (92 дБ)	2,664	0,0907	0,0025	2,793	2,004	$6\cdot10^{-5}$	0,956	0,359

Оптимизация аргументов оконных функций. Задаче выбора оконных функций посвящено достаточно много работ, обзор которых приведен, например, в [2, 4]. Как видно из табл. 1. ниодна из оконной функций не превосходит по всем параметрам остальные функции. Каждое из известных окон было сконструировано с учетом целевой функции, отражающей качество АЧХ блока ДПФ. Однако учесть в одной целевой функции противоречивые между собой показатели не представляется возможным. А таких показателей известно несколько. Например, в [4, с. 106] сформулированы следующие свойства, которыми должна обладать оконная функция:

ширина главного лепестка частотной характеристики окна, содержащего по возможности большую часть общей энергии, должна быть малой;

энергия в боковых лепестках частотной характеристики окна должна быстро уменьшаться.

К этим двум противоречивым свойствам необходимо добавить, по крайней мере, еще один показатель: неравномерность АЧХ блока ДПФ с оконной функцией должна быть малой.

Отсюда вытекает целесообразность использования иного подхода к конструированию оконных функций по сравнению с известными методами, которые основаны на оптимизации только одной целевой функции без учета ограничений на ряд параметров. Таким подходом, очевидно, является формирование задачи конструирования оконных функций в виде задачи нелинейного программирования, что позволяет учесть и отразить все интересующие противоречивые параметры оконных функций в ограничениях и целевой функции. При этом задача параметрического синтеза оконной функции сводится к следующей: найти

$$\min_{\mathbf{p}} F\left(w(\mathbf{p},t)\right) \tag{14}$$

где $F\left(w(\mathbf{p},t)\right)$ − целевая функция, зависящая от одного из приведенных параметров, $\mathbf{p}$ − вектор варьируемых аргументов оконной функции, при условиях

$$R_i\left(w(\mathbf{p},t)\right) \le R_{0i}, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{15}$$

$$w(\mathbf{p},t) \in C(t), \tag{16}$$

где ограничение (16) отражает общие свойства 1 – 3 оконной функции, например, в виде

$$w(1/2) = 1,\ w(0) \ge 0,\ w(\tau n) \le w(\tau n + \tau),\ w(1/2 - n\tau) = w(1/2 + n\tau),\ n = 0,\ldots,N/2 - 1. \tag{17}$$

В (14) – (17) отрезок задания оконной функции является нормированным: $[0,T] = [0,1]$.

Для решения задачи (14) – (17) целесообразно использовать алгоритм решения задачи условной оптимизации, представляющий собой сочетание метода штрафных функций (ШФ) и не требующего вычисления производных по методу Нелдера─Мида (НМ). Целесообразность применения алгоритма ШФ─НМ обусловлена существенным недостатком известного алгоритма решения задач условной оптимизации, основанного на методе НМ и методе скользящего допуска [5, с. 381]. Недостаток заключается в том, что, как показали многочисленные эксперименты, при решении задачи (14) – (17) с помощью этого алгоритма скорость сходимости оптимизации резко падает с увеличением размерности вектора аргументов. В то же время, сходимость исходного метода НМ при решении задач безусловной оптимизации с возрастанием размерности вектора варьируемых параметров замедляется значительно меньше, чем сходимость метода скользящего допуска. Это свойство послужило предпосылкой для синтеза алгоритма, в котором на каждом этапе решения задачи условной оптимизации методом ШФ используется метод НМ (или его модификация) безусловной оптимизации.

Использование метода НМ в качестве базового обусловлено двумя факторами. Первый состоит в том, что этот метод не требует знания производных целевой функции и ограничений по параметрам, поскольку их вычисления выполняются (в общем случае) путем численного дифференцирования и слишком трудоемки. Второй фактор обусловлен многоэкстремальностью решения задачи (14) − (17). Для решения таких задач метод НМ является одним из наиболее приемлемых.

Вид целевой функции и типы ограничений зависят от конкретной задачи, решаемой с применением ДПФ. Например, для задачи (14) – (17) приведенные выше три свойства оконной функции могут быть представлены следующим образом: найти вектор аргументов, обеспечивающих минимальную ширину главного лепестка:

$$\min_{\mathbf{p}} \Delta_w\left(w(\mathbf{p},t)\right) \tag{18}$$

при выполненных ограничениях на максимальный уровень боковых лепестков

$$S_w(\mathbf{p}) \le S_0\,, \tag{19}$$

на коэффициент неравномерности АЧХ блока ДПФ с оконной функцией

$$V_w(\mathbf{p}) \le V_0 \tag{20}$$

и при выполненных ограничениях (17). (Ограничение (20) сформировано для случая отсутствия добавленных нулей).

Рассмотрим выбор вектора аргументов решением (18) – (20) для восьмичленной оконной функции

$$w(\mathbf{p},t) = \sum_{k=0}^{7} p_k \cos(k2\pi t) \tag{21}$$

на отрезке $t \in [0,1]$ при $w(\mathbf{p},1/2) = 1$, $S_0 = 0{,}0015$, $V_0 = 0{,}05$. Решением задачи (18) – (20) является вектор $\mathbf{p}$ с элементами

$$\begin{aligned} &p_0 = 0.263797, p_1 = -0.429350, p_2 = 0.226049,\\ &p_3 = -0.068962, p_4 = 0.007937, p_5 = 0.000244,\\ &p_6 = 0.000757, p_7 = -0.000376. \end{aligned} \tag{22}$$

В первой строке табл.2 приведены значения параметров для оконной функции (21) с аргументами (22). Между параметрами оконных функций − шириной главного лепестка и неравномерностью АЧХ – существует жесткая обратно пропорциональная зависимость. Поэтому при заданной ширине главного лепестка не представляется возможным уменьшить неравномерность АЧХ, минимизировав ее по аргументам. Менее жесткая зависимость существует между шириной главного лепестка и максимальным уровнем боковых лепестков. Эта зависимость во многих случаях дает возможность значение целевой функции полученное при решении задачи (18) – (20), использовать в качестве допуска на ширину главного лепестка, переведя ее в ограничение, и дополнительно минимизировать уровень боковых лепестков путем решения следующей задачи: найти вектор $\mathbf{p}$, обеспечивающий

$$\min_{\mathbf{p}} S_w\left(w(\mathbf{p},t)\right)$$

при выполненных ограничениях (17) и ограничениях на ширину главного лепестка

$$\Delta_w(w(\mathbf{p},t)) \le 3{,}625\,,$$

Решением этой задачи является вектор с элементами

$$\begin{aligned} &p_0 = 0.263596, p_1 = -0.429004, p_2 = 0.226017,\\ &p_3 = -0.070181, p_4 = 0.0096, p_5 = -0.00008,\\ &p_6 = 0.000002, p_7 = 0.000005. \end{aligned} \tag{23}$$

Во второй строке табл. 2 приведены значения параметров для оконной функции (21) с аргументами (23). Как видно, максимальный уровень боковых лепестков существенно уменьшен без увеличения ширины главного лепестка.

Таблица 2.

Оконная функция	Δ, бин	V	S, %	K	E, бин	h	P	L
$\sum_{k=0}^{7} p_k \cos(k2\pi t)$	3,625	0,05	0,1561	3,799	2,726	0,000096	0,954	0,264
$\sum_{k=0}^{7} p_k \cos(k2\pi t)$	3,625	0,05	0,00542	3,803	2,728	0,0089	0,953	0,263
непараметрическая	1,906	0,17	0,316	2,078	1,41	0,04227	0,917	0,511
$\sin^{16}(\pi t)$ с подставкой	4,812	0,039	0,00316	5,094	3,621	0,00027	0,945	0,197

В качестве примера использования точечной оптимизации рассмотрим задачу (18) – (20) построения кусочно-ступенчатой оконной функции с числом узлов интерполяции, равном 128. Необходимо определить ее значения в узлах интерполяции, т.е. найти 128 узловых значений функции, обладающей минимальной шириной главного лепестка при ограничении на уровень боковых лепестков, равным 0,00316 (-50 дБ), Поскольку оконная функция симметрична, размерность вектора **p** варьируемых параметров, равна 64. Полученные узловые значения оконной функции, приведены в таблице 3.

Таблица 3.

w(**p**)		
w[0]=0,042270	w[22]=0,290724	w[43]=0,747348
w[1]=0,049409	w[23]=0,303814	w[44]=0,770379
w[2]=0,052835	w[24]=0,327475	w[45]=0,790097
w[3]=0,055731	w[25]=0,343930	w[46]=0,804706
w[4]=0,060198	w[26]=0,372181	w[47]=0,828261
w[5]=0,063331	w[27]=0,379291	w[48]=0,837673
w[6]=0,069462	w[28]=0,412825	w[49]=0,868618
w[7]=0,076692	w[29]=0,432128	w[50]=0,879241
w[8]=0,079385	w[30]=0,456983	w[51]=0,892090
w[9]=0,091619	w[31]=0,477642	w[52]=0,907400
w[10]=0,102355	w[32]=0,499616	w[53]=0,924014
w[11]=0,116494	w[33]=0,520677	w[54]=0,933542
w[12]=0,130925	w[34]=0,541274	w[55]=0,946669
w[13]=0,142799	w[35]=0,567847	w[56]=0,958827
w[14]=0,158031	w[36]=0,594048	w[57]=0,966156
w[15]=0,174199	w[37]=0,611685	w[58]=0,974446
w[16]=0,181775	w[38]=0,642074	w[59]=0,981815
w[17]=0,196418	w[39]=0,662169	w[60]=0,986636
w[18]=0,214425	w[40]=0,679537	w[61]=0,990780
w[19]=0,231926	w[41]=0,698591	w[62]=0,993714
w[20]=0,252250	w[42]=0,726634	w[63]=0,996958
w[21]=0,268104		w[64]=1,000000

По своим параметрам полученная функция превосходит окно Дольфа – Чебышева при $\alpha = 2{,}5$ [2]. Рассмотренный пример свидетельствует о принципиальной возможности синтеза оконной функции, заданной в непараметрическом виде.

Как упомянуто выше, для задач, в которых вычисления проводятся с фиксированной запятой, важным свойством оконной функции является наличие и величина ненулевой подставки. Например, в спектр-анализаторах, в случаях, когда есть возможность увеличивать интервал наблюдения за сигналом (величину T), удобно использовать оконную функцию $\sin^{\alpha}(t)$ с параметром $\alpha \geq 4$. Эти функции имеют относительно малую неравномерность АЧХ и малый уровень боковых лепестков. Однако при вычислениях с фиксированной запятой форма функции может стать причиной потери отсчетов в начале и в конце выборки. Для таких оконных функций целесообразно применение подставки.

Рассмотрим задачу выбора подставки h_w ($h_w \geq 0{,}00001$) для функции $\sin^{16}(\pi t)$ (имеющей вид $w(n\tau) = h_w + (1-h_w)\sin^{16}(\pi n/N)$, $n = 0,...,N-1$) таким образом, чтобы выполнялись условия $V_w \leq 0{,}029$, а $\Delta_w \leq 4{,}82$ бин. Кроме того, потребуем, чтобы полученное окно имело малый уровень боковых лепестков (например, $S_w \leq -80$ дБ). Этого можно ожидать, так как исходное окно без подставки имеет максимальный уровень боковых лепестков $-126{,}7$ дБ.

В результате оптимизации была получена оконная функция с параметрами, приведенными в четвертой строке табл. 2. В зависимости от разрядности вычислительного устройства, на котором реализуется блок ДПФ, можно синтезировать окна с дополнительным ограничением снизу на величину подставки.

Следует отметить важность формирования допусков для ограничений (15). Задание узких допусков может привести к несовместимым ограничениям. Поэтому при задании ограничений полезно иметь предельно достижимые значения параметров оконных функций, Для некоторых параметров эти значения можно определить в общем случае. Так, для оконных функций, удовлетворяющих условиям 1 – 3, ширина главного лепестка спектра оконных функций (один из основных показателей) не может быть меньше ширины главного лепестка для прямоугольной оконной функции. Данное свойство вытекает из следующего утверждения.

Утверждение. Если оконная функция удовлетворяет условиям 1 – 3, то на отрезке $[0, 2\pi/T]$ справедливо неравенство

$$2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{T\omega} \leq \frac{\widetilde{W}(\omega)}{\widetilde{W}(0)},$$

где левая часть – модуль спектра прямоугольной оконной функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что

$$2\frac{\sin\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{T\omega} \cdot \int_0^{T/2} w(T/2+t)dt \leq \int_0^{T/2} w(T/2+t)\cos(\omega t)dt,$$

или, что то же самое,

$$\int_0^{T/2} w(T/2+t)\left(\cos(\omega t) - 2\frac{\sin\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{T\omega}\right)dt \geq 0,$$

Выполняя интегрирование по частям и учитывая при этом, что функция $\frac{\sin x}{x}$ монотонно убывает на интервале $[0, \pi]$, получаем

$$\int_0^{T/2} w(T/2+t)\left(\cos(\omega t) - 2\frac{\sin\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{T\omega}\right)dt = -\int_0^{T/2} w'(T/2+t)\left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - 2\frac{\sin\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{T\omega}t\right)dt \geq 0,$$

Утверждение доказано.

Предельно достижимые значения остальных параметров оконных функций можно устанавливать приближенно, используя данные, приведенные в таблицах, Таким образом, используя приведенный способ минимизации целевой функции при заданных ограничениях на параметры, можно синтезировать оконные функции для конкретных типов задач гармонического анализа с помощью ДПФ.

1. *Годлевский В.С., Денисенко А.М.* Методические погрешности дискретного преобразования Фурье и способах их компенсации// Электрон. моделирование.— 2006. — **28**, №3. — С.83 – 98.

2. *Хэррис Ф. Дж.* Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье// ТИИЭР.– 1978.– **66**, №1. – С. 60 − 96.

3, *Марпл С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложение. — М.: «Мир», 1990. — 584 с.

4, *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. − М.: Мир, 1978. − 848 с.

5, *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975. — 536 с.

Поступила 08.07.05

ГОДЛЕВСКИЙ Виталий Станиславович, д-р техн. наук, директор МП «ДИСИТ» НАН Украины. В 1966 г, окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований – моделирование, оптимизация режимов и диагностика технических систем, аналоговая и цифровая обработка сигналов.

ДЕНИСЕНКО Александр Михайлович, науч. сотр. МП «ДИСИТ» НАН Украины. В 2000 г. окончил Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко. Область научных исследований – цифровая обработка сигналов.